

# Fogalomtár – Lineáris programozási modellek

**Definíció:** Az  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény esetén az  $f$  akkor és csak akkor **lineáris függvénye** az  $x_1, \dots, x_n$  változóknak, ha léteznek  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  számok úgy, hogy

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n.$$

**Definíció:** Ha  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lineáris függvénye az  $x_1, \dots, x_n$  változóknak, akkor  $b \in \mathbb{R}$  esetén az

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq b \quad \text{illetve az} \quad f(x_1, \dots, x_n) \geq b$$

alakú egyenlőtlenségeket **lineáris egyenlőtlenségeknek** nevezzük.

**A modellezés folyamata:** A matematikai modell felírását azzal kezdjük, hogy értelmezzük a **döntési változókat**. Ezek a változók a modellben nem rögzített, a döntéshozó által megválasztható értékeket képviselnek és képesnek kell lenniük a modellben a feltételek és a döntés leírására. A döntési változóknak a feladat alapján esetleg meg kell felelniük bizonyos megszorításoknak. Ha egy döntési változó csak nemnegatív értékeket vehet fel, akkor érvényes rá a **nemnegativitási** vagy **előjelkorlátozó feltétel**. Ha egy változó bármilyen értéket felvehet, akkor **előjelkötetlen** változóról beszélünk. A modell felírásának legfontosabb lépése a változók helyes meghatározása. Szöveges gazdasági feladat esetén fontos a mértékegységek egyeztetése.

A modellezés következő lépése a **korlátozó feltételek** felírása, a probléma során milyen szempontoknak kell megfelelnünk.

A modell felvételének harmadik lépése a **célfüggvény** felírása. A döntéshozó optimalizálni szeretné a döntési változók valamilyen függvényét. Egy döntési változónak a célfüggvényben szereplő együtthatóját a változó **célegyütthatójának** nevezzük.

**Definíció:** Egy **lineáris programozási (LP) feladat** során olyan modellt határozunk meg, melyben

- a döntési változóknak teljesíteniük kell előjelkorlátozási feltételeket (minden változó vagy csak nemnegatív lehet vagy előjelkötetlen);
- a döntési változók értékeinek teljesíteniük kell a korlátozó feltételeket, melyek a változók lineáris függvényeiből származnak (egyenlőségek vagy egyenlőtlenségek);
- a döntéshozó a döntési változók valamely lineáris függvényét, a célfüggvényt szeretné optimalizálni.

**Definíció:** A fentiek alapján egy LP feladatban a célfüggvény és a korlátozó feltételek is lineárisak, ebből következően a célfüggvény valamint minden feltétel bármelyik döntési változóhoz tartozó része arányos a változó értékével. Ezt szokás **arányossági feltételnek** nevezni. Továbbá a célfüggvény valamint minden feltétel bármelyik változóból származó része független a többi változótól, tehát a célfüggvény és minden feltétel értéke az egyes változókból származó részek összege, melyet **additivitási feltételnek** nevezünk.

**Definíció:** Az olyan lineáris programozási feladatot, melyben bizonyos változók csak nemnegatív egész értékeket vehetnek fel, **integer** vagy **egészértékű programozási feladatnak** nevezzük (IP).

**Definíció:** Egy lineáris programozási feladat **lehetséges megoldásainak halmaza** a változók összes olyan értékét jelenti, melyek kielégítik a feladat összes korlátozó feltételét és az összes előjelkorlátozást.

**Definíció:** Egy lineáris programozási feladat **optimális megoldása** egy olyan lehetséges megoldás, melyre a célfüggvény értéke a feladat szempontjából optimális (tehát maximalizálás esetén a legnagyobb, minimalizálás esetén a legkisebb)

**Definíció:** Egy LP feladat egy feltételét **aktív** feltételnek nevezzük, ha az optimális megoldást a feltételbe helyettesítve a feltétel két oldala egyenlő értéket ad.

**Definíció:** Egy LP feladat esetén az optimális megoldást a feltételrendszerbe helyettesítve új változók bevezetésével minden feltétel esetén elérhető, hogy az adott feltétel két oldala egyenlő értéket adjon. Az így bevezetett új változókat **eltérésváltozóknak** nevezzük. Az eltérésváltozók lehetnek többlet- illetve hiányváltozók is, ezeket a megoldásban mindkét esetben pozitív értékkel szerepeltetjük. Aktív feltételhez illetve egyenlőség alakú feltételhez mindig 0 értékű eltérésváltozó tartozik.

Egy LP feladat megoldásakor a következő esetek fordulhatnak elő:

- A feladatnak egyértelmű optimális megoldása van.
- A feladatnak egynél több (ekkor mindig végtelen számú) optimális megoldása van. Ezeket **alternatív optimumoknak** nevezzük.
- A feladat nem megoldható, nincs lehetséges megoldás.
- A feladat nemkorlátos. Ekkor léteznek lehetséges megoldások, de optimális megoldás nincs. Tehát maximalizálási problémában a célfüggvény tetszőlegesen nagy, minimalizálási problémában a célfüggvény tetszőlegesen kicsi lehet.